

## Abszolútértékes és gyökös kifejezések Megoldások

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0 \quad (2 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

A  $10-x > 0$  egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)

$x < 10$  (1 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a)  $\log_3(\sqrt{x+1}+1) = 2$ , ahol  $x$  valós szám és  $x > -1$  (6 pont)

b)  $2 \cos^2 x = 4 - 5 \sin x$ , ahol  $x$  tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

**Megoldás:**

a) A logaritmus definíciója szerint  $\sqrt{x+1}+1 = 3^2$  (2 pont)

$\sqrt{x+1} = 8$  (1 pont)

$x+1 = 64$  (1 pont)

$x = 63$  (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) Lásd: Trigonometria 2. feladat

**Összesen: 17 pont**

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a)  $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$  (6 pont)

b)  $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{\sqrt{x}}$  (6 pont)

**Megoldás:**

a) Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 9. feladat

b)  $x \geq 0$  (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$  (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$  (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

**nincs valós megoldás.** (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

4) Válassza ki az  $A$  halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a  $\sqrt{x^2} = -x$  egyenletnek!  $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$  (2 pont)

**Megoldás:**

Az egyenlet megoldásai az  $A$  halmaz elemei közül:  $-1$  és  $0$ . (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$|x-2| = 7 \quad (2 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

Az egyenlet megoldása a  $9$  (1 pont)

és a  $-5$ . (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a)  $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$  (6 pont)

b)  $\sin^2 x = 1 + 2 \cos x$  (6 pont)

**Megoldás:**

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet:  $x \leq 5$ , (1 pont)

és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke:  $|x| \leq \sqrt{35,5}$ . (1 pont)

Négyzetre emelve:  $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$ . (1 pont)

Rendezve:  $x^2 + 10x - 96 = 0$  (1 pont)

amelynek valós gyökei a  $-16$  és a  $6$ . (1 pont)

Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek. Az egyenlet egyetlen megoldása a  $-16$ , hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 11. feladat*

**Összesen: 12 pont**

7) Adja meg azt az  $x$  valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} = 2 \quad (2 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

$$x = 16 \quad (2 \text{ pont})$$

8)

a) Melyik  $(x; y)$  valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 6y = 4 \\ 3x + 5y = 20 \end{array} \right\} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = x \quad (6 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 14. feladat*

b)  $\sqrt{x+2} = x$

$$x+2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_1 = 2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = -1 \quad (1 \text{ pont})$$

Ellenőrzés:  $x_2 = -1$  hamis gyök. (1 pont)

$x_1 = 2$  megoldása az egyenletnek. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

9) Mely  $x$  valós számokra igaz, hogy  $|x| = 7$ ? (2 pont)

**Megoldás:**

$$x_1 = -7 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = 7 \quad (1 \text{ pont})$$

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = |x - 4|$  függvény.

Mely  $x$  értékek esetén lesz  $f(x) = 6$ ? (2 pont)

**Megoldás:**

$$x_1 = -2, x_2 = 10 \quad (2 \text{ pont})$$

11) a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + 4 = \sqrt{4x + 21} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol  $x$  és  $y$  valós számot jelöl! (6 pont)

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 16 \\ 5x - 2y = 45 \end{array} \right\}$$

**Megoldás:**

a) Értelmezési tartomány:  $4x + 21 \geq 0$  és  $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ .

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$$x^2 + 8x + 16 = 4x + 21. \quad (2 \text{ pont})$$

Rendezve:  $x^2 + 4x - 5 = 0$ . (1 pont)

Az egyenlet gyökei:  $x_1 = -5, x_2 = 1$  (1 pont)

A  $-5$  nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az  $1$  ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 16. feladat

**Összesen: 12 pont**

12) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

$$|x^2 - 8| = 8 \quad (3 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

$$x_1 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = 4 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_3 = -4 \quad (1 \text{ pont})$$

**Összesen: 3 pont**

13) Az ábrán a  $[-1; 5]$  intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.

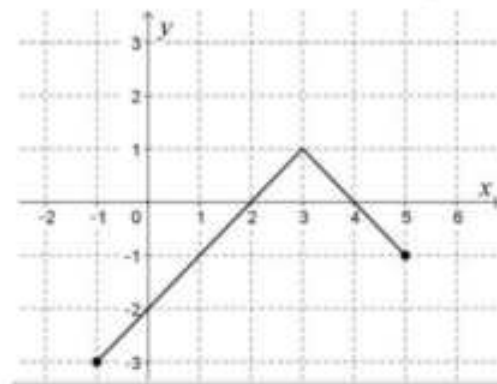
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

A:  $x \mapsto |x - 3| + 1$

B:  $x \mapsto -|x + 3| + 1$

C:  $x \mapsto -|x - 3| + 1$

D:  $x \mapsto -|x + 3| - 1$



**Megoldás:**

A hozzárendelési szabály betűjele: **C**

(2 pont)

14) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x - 3| = 3x - 1. \quad (7 \text{ pont})$$

Az  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$  lineáris függvény zérushelye  $-4$ . Tudjuk továbbá, hogy az  $x = 4$  helyen a függvényérték  $6$ .

b) Adja meg  $a$  és  $b$  értékét! (6 pont)

**Megoldás:**

- a) Az egyenlet alakja  $x \geq 3$  esetén:  $x - 3 = 3x - 1$ , (1 pont)  
amiből  $x = -1$ , (1 pont)  
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)  
Az egyenlet alakja  $x < 3$  esetén:  $-(x - 3) = 3x - 1$ , (1 pont)  
amiből  $x = 1$ . (2 pont)  
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) Lásd: Függvények 48. feladat

**Összesen: 13 pont**

15) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A)  $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\sqrt{x^2} = x$ .

C)  $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

**Megoldás:**

A)  $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$ , tehát az állítás **igaz**.

B)  $\sqrt{x^2} = |x|$ , amely állítás negatív  $x$ -re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C)  $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$ , az állítás így **igaz**. (2 pont)

**Összesen: 2 pont**

16) Az  $x$ -nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg  $x$  lehetséges értékeit! (2 pont)

**Megoldás:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel:  $|x + 2| = 6$ .

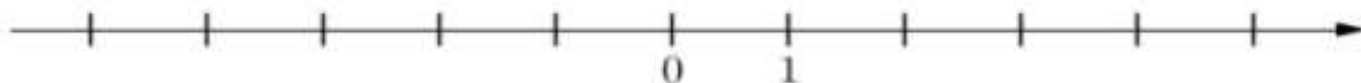
Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I.  $x + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 4$  (1 pont)

II.  $x + 2 = -6 \Rightarrow x_2 = -8$  (1 pont)

**Összesen: 2 pont**

17) Ábrázolja az alábbi számegyenesen az  $|x| < 3$  egyenlőtlenség valós megoldásait! (2 pont)



**Megoldás:**



**Összesen: 2 pont**

18) Péter és Pál szendvicset és ásványvizet vásárolt a büfében. Péter két szendvicset és két ásványvizet vett 740 Ft-ért, Pál pedig három szendvicset és egy ásványvizet 890 Ft-ért.

a) Mennyibe kerül egy szendvics, és mennyibe kerül egy ásványvíz? (6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$1 - x = \sqrt{x + 5} \quad (5 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

a) *Lásd: Szöveges feladatok 45. feladat*

b) Kikötés:  $x \geq -5$  és  $x \leq 1$  (1 pont)

Mindkét oldalt négyzetre emeljük:  $1 - 2x + x^2 = x + 5$  (1 pont)

Az egyenletet 0-ra rendezzük:  $x^2 - 3x - 4 = 0$  (1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei:  $x_1 = 4$  és  $x_2 = -1$  (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$x_1 = 4 \Rightarrow 1 - 4 \neq \sqrt{4 + 5}$ , tehát az  $x_1 = 4$  nem megoldása az egyenletnek.

$x_2 = -1 \Rightarrow 1 - (-1) = \sqrt{-1 + 5}$ , tehát az egyenlet megoldása **-1**. (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

19) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$|x - 4| = 1 \quad (2 \text{ pont})$$

**Megoldás:**

Ha  $x \geq 4$ , akkor  $x - 4 = 1$ , tehát  $x_1 = 5$ . (1 pont)

Ha  $x < 4$ , akkor  $-x + 4 = 1$ , tehát  $x_2 = 3$ . (1 pont)

**Összesen: 2 pont**